論 文

壁面上の液滴形状に及ぼす重力の効果に関する一考察*1

天 谷 賢 児*2, 新 井 雅 隆*2

GRAVITATIONAL EFFECT ON SHAPE OF DROPLET ON A WALL

Kenji AMAGAI and Masataka ARAI

The aim of this study is to obtain basic knowlege of the gravitational effect on a shape of droplet on a wall. Laplace equation describing the relation between pressure deference and curvature at an interface was solved numerically. The effects of temperature dependence of the surface tension was also considered. Deformation of a droplet under the high gravitational fields was experimentally measured by using the centrifugal accelerator in order to estimate the validity of numerical results. The numerical results agreed well with the experimental results. The numerical results suggests that the droplet shape was affected by the temperature dependence of the surface tension under the low gravitational fields.

Key Words : Droplet shape, Gravity, Numerical analysis, Centrifugal accelerator

1. 緒言

宇宙実験室や月面基地計画が具体化されるのに伴い、地球上とは異なった重力環境における熱利用技術の確立が重要となってきた。特に、材料の急速冷却法や火災時の消化技術などに対して、噴霧を用いた高温面からの熱回収や熱除去法は地球と異なる重力環境においても最も有効な方法の一つであると考えられる。このような問題は液滴界面の変形や流動、熱物質伝達などを伴い、重力の大きさが現象に本質的に関与する。しかしながら、重力の大きさがこのような噴霧冷却の熱伝達特性にどのように関与するかは具体的に明らかにされていない。

著者らはこれまでに、宇宙工学分野における噴霧利用技術を確立する基礎実験として過重力場における高温壁面上の単一液滴の蒸発挙動を調べてきた[1]。それによれば、重力による液滴の変形挙動がその蒸発挙動に大きく影響することが示された。また、これまでにライデンフロスト状態にある液滴の形状や蒸発特性は解析されてきたが[2]、これらに対する重力の効果については十分に検討なされていない。そこで本研究では、壁面上の液滴形状に対する重力の効果を検討した。すなわち、表面張力の温度依存性を考慮して液滴形状を求める数学モデルを導き、液滴形状に及ぼす重力の大きさの影響を数値的に調べた。特に、壁面から液滴への熱移動量に直接関与する液滴底面積の重力の大きさによる変化を詳細に調べた。

＊1 平成6年1月20日 原稿受付
＊2 正員，群馬大学工学部
〒376 群馬県桐生市天神町1-5-1
ＴＥＬ0277-30-1522 ＦＡＸ0277-30-1599

2．理論解析

理論解析を行うにあたり以下の仮定を行った。

(1)　液滴内部の流動は考慮しない。

(2)　重力加速度の方向に対して水平な壁面を考え、その上に回転対称形の液滴を考える。

(3)　液体表面からの蒸発は考えない。

(4)　密度の温度依存性は考慮しない。

(5)　表面張力は温度に関して一次の関数で与えられる。

このとき液滴表面に対する静的な力の釣り合いから次のLaplace の式が成り立つ。

$$p_l - p_g = 2\sigma(T)H \tag{1}$$

ここで、p_lおよびp_gは液滴内および周囲気体の圧力、$\sigma(T)$は表面張力、Hは液滴の平均曲率である。液滴頂点における液体内の圧力をp_tとすると静水圧の式より次式が成り立つ。

$$p_l - p_t = (\rho_l - \rho_g)gGz \tag{2}$$

ここで、図1(a),(b)に示すように、z軸は液滴頂部から鉛直下向きにとった。ρ_lおよびρ_gは液体および周囲気体の密度(ただし、以下の解析ではρ_gがρ_lに比べ十分小さいとしてρ_gを無視した)、gは地球上における重力の加速度である。また、Gは重力場の大きさを表す無次元重力加速度で、g'を問題としている重力場の加速度として次式で定義する。

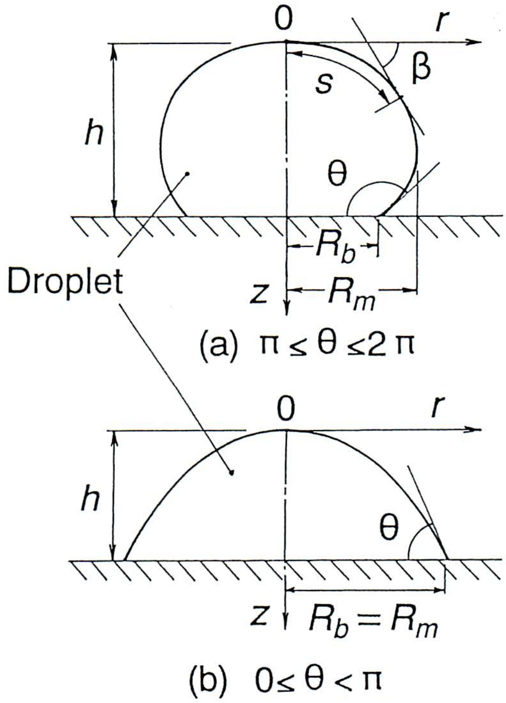


図1　液滴形状のパラメータおよび座標系

$$G = \frac{g'}{g} \tag{3}$$

したがって、G＜1のときは（地球上の重力場に対して）小重力場を、G＞1のときは過重力場を意味する。式(1)、(2)より次式を得る。

$$\rho_l gGz + (p_t - p_g) = 2\sigma(T)H \tag{4}$$

また、液滴頂部における平均曲率をH_0、表面張力をσ_0とすれば、$p_t - p_g = 2\sigma_0 H_0$となるから式(4)は次式となる。

$$\frac{\sigma(T)}{\sigma_0}H - H_0 = \frac{\rho_l gG}{2\sigma_0}z \tag{5}$$

ここで、HおよびH_0を決めると液滴の表

面形状を求める方程式が得られる。このHは液滴の母線を記述する関数の形式によっていく通りかの表現が可能である。液滴の母線を

$$z = F(r) \tag{6}$$

で与えられる場合にはHおよびH_0が次式で与えられる。

$$2H = \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r^2}\left\{1+\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\left\{1+\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{7}$$

$$H_0 = \left(\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r=0} \tag{8}$$

これを式(5)に代入すると、次の表面形状を支配する微分方程式が得られる。

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r=0} + \frac{\rho_l g G}{2\sigma_0}F = \frac{\sigma(T)}{\sigma_0}\left[\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r^2}\left\{1+\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\left\{1+\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{9}$$

ここで、表面張力の温度依存性を考慮しない場合には$\sigma(T) = \sigma_0$となり、Wachtersら[2]が液滴の形状を計算する際に用いた方程式と一致する。しかし、図1(a)のような$\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ ($R_m > R_b$)となる液滴の場合にはFがrに関して二価の関数になること、Fのr方向微分が$r = R_m$で発散することなどの計算に不都合な点が含まれている。このことを考慮して本論文では液滴の形状を媒介変数sを用いて次のように表すことにする。

$$r = r(s), \quad z = z(s) \tag{10}$$

このとき、平均曲率Hは次式となる[3]。

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{r'z'' - z'r''}{(r'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z'}{r(r'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}}\right\} \tag{11}$$

ここで、記号´はsによる微分d/dsを意味する。sを図1のように液滴の頂点から母線に沿った長さとし、その点を通る母線の接線がr軸となす角β(s)とすれば次の関係が得られる。

$$r(s) = \int_0^s \cos\beta(t)\mathrm{d}t, \quad z(s) = \int_0^s \sin\beta(t)\mathrm{d}t \tag{12}$$

$$r'(s) = \cos\beta(s), \qquad z'(s) = \sin\beta(s) \tag{13}$$

$$r''(s) = -\beta'(s)\sin\beta(s), \quad z''(s) = \beta'(s)\cos\beta(s) \tag{14}$$

これらを式(11)に代入すればHは次式となる。

$$H = \frac{1}{2}\left(\beta' + \frac{\sin\beta(s)}{\int_0^s \cos\beta(t)\mathrm{d}t}\right) \tag{15}$$

また、H_0は次式となる。

$$H_0 = \frac{\beta'(0)}{2} \tag{16}$$

式(5)に式(12), (15), (16)を代入して整理すると、次の液滴形状を記述する微積分方程式を得る。

$$\beta'(0) - \frac{\sigma(T)}{\sigma_0}\beta'(s) + \frac{\rho_l g G}{\sigma_0}\int_0^s \sin\beta(t)\mathrm{d}t = \frac{\sigma(T)}{\sigma_0}\sin\beta(s) \Big/ \int_0^s \cos\beta(t)\mathrm{d}t \tag{17}$$

ここで、長さの次元をもつ量L（毛管定数）を次式で定義する。

$$L = \sqrt{\frac{2\sigma_0}{\rho_l g G}} \tag{18}$$

これは液滴の形状を特徴づけるパラメータである。方程式を無次元化するために

$$s^* = \frac{s}{L} \tag{19}$$

とおくと、次の無次元方程式を得る。

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s^*} - 2\frac{\sigma_0}{\sigma(T)}\int_0^{s^*} \sin\beta(t^*)\mathrm{d}t^* \\ &= \frac{\sigma_0}{\sigma(T)}\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s^*}\right)_{s^*=0} + \frac{\sin\beta(s^*)}{\int_0^{s^*}\cos\beta(t^*)\mathrm{d}t^*} \end{aligned} \tag{20}$$

上式より、液滴の形状は無次元化された表面張力$\sigma_0/\sigma(T)$が決まると一意に決定される。すなわち、母線に沿って温度分布を$T=T(s^*)$で与えれば表面張力の温度依存性を考慮して液滴の形状を求めることが可能になる。

液滴表面の温度分布は液滴内の自然対流、マランゴニ対流や周囲気体との熱伝達によって決まるが、液滴表面の温度分布に関する詳細な結果は知られていない。ここでは問題を単純化して見通しの良い議論を行うために、液滴頂部と底部を結ぶ母線上に直線的な温度勾配がある場合を考える。液滴頂部の温度を代表温度T_0、その温度における表面張力をσ_0、液滴底部の温度をT_b、その表面張力をσ_bとすれば、無次元化された表面張力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma_0}{\sigma(T)} = \frac{1}{1+\varepsilon(s^*/s_b^*)}, \\ &\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}T}(T_b - T_0) = \frac{\sigma_b - \sigma_0}{\sigma_0} \end{aligned} \tag{21}$$

ここで、εは表面張力比で、液滴頂点部と底部の間の表面張力の変化率を表すパラメータである。また、s_b^*はLで無次元化された液滴母線の長さである。液滴頂部と底部の間に温度勾配がない場合には$\varepsilon=0$となり温度依存性を考慮しない方程式と一致する。

最終的に、式(20)に式(21)を代入して次の無次元体積V^*および接触角θに対する条件式が満たされるように解けば、液滴の形状を求めることができる。

$$V^* = \frac{V}{L^3} = \pi\int_0^{h^*} \left\{\int_0^{s^*}\cos\beta(t^*)dt^*\right\}^2 dz^* \tag{22}$$

$$\beta(s_b^*) = \theta \tag{23}$$

ここで、$z^*=z/L$, $h^*=h/L$（hは液滴の高さ）である。接触角θは壁面の性状や接触する液体との親和性、液体の温度などによって変化すると思われる。しかしながら、本研究では液滴形状に与える重力の影響を検討する目的から、接触角は液体と壁面の組み合わせによってある一定値に決まり、重力や温度によって変化しないものと仮定する。実際の計算では式(20)の右辺第１項の微係数を仮定し、ルンゲ・クッタ法を用いて初期値問題として解いた。このとき、式(22)および(23)を満たすように右辺第１項の微係数を修正して収束計算を行った。収束判定は次式で行った。

$$V^* - \widetilde{V^*} < \frac{V^*}{10000} \tag{24}$$

ここで、$\widehat{V}^*$は計算から得られる液滴体積である。

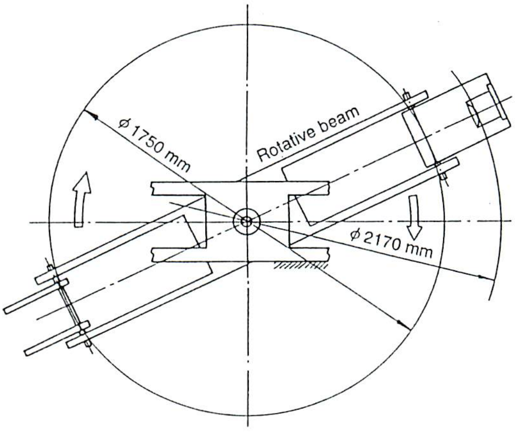
式(17)で温度依存性を考えない場合、液滴体積Vの立方根を代表長さとして無次元化すると方程式内に唯一のパラメータとしてボンド数B_0が現れる。

$$Bo = \frac{\rho_l g G V^{\frac{2}{3}}}{\sigma_0} \tag{25}$$

毛管定数Lとの間には$L = 2V^{2/3}/\sqrt{B_0}$の関係がある。B_0が同じならばρ、G、σ_0、Vが異なっても液滴形状は相似になる。したがって、このような相似関係を用いればG＝1のもとでも液滴形状に及ぼす重力効果を実験的に解析することは可能であるが、壁面から液滴への熱移動や蒸発なども含めて相似則を成立させることは必ずしも容易でない。

3．遠心加速器を用いた過重力実験

ここで行った計算の信頼性を確認する目的で、遠心加速器を用いて液滴の形状に与える重力の影響を実験的に調べた。使用した液体は精製水、ベンゼンおよび水銀である。また、壁面との接触角を変えるために液滴をのせる壁面としてテフロン板と里芋の葉を使用した。すなわち、テフロン上においた精製水、ベンゼン、水銀の接触角がそれぞれθ＝108，46，150度であり、里芋



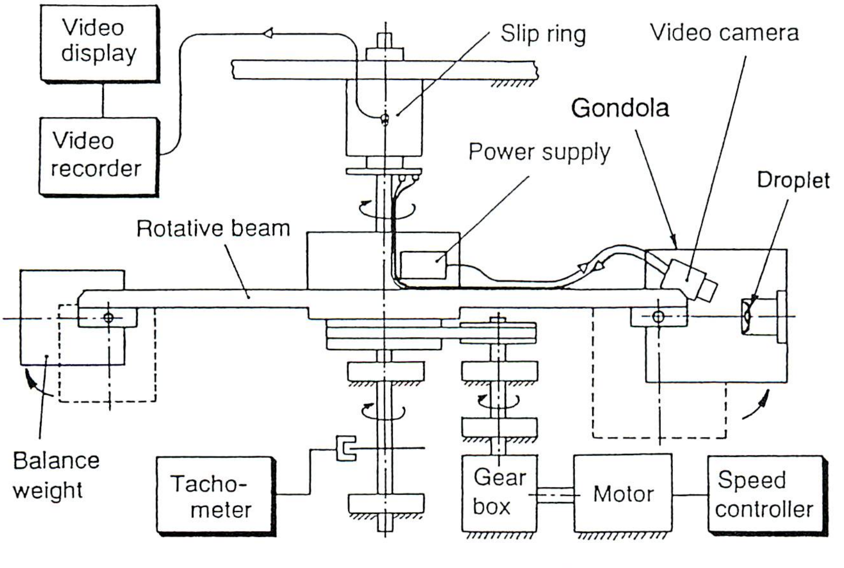


図２　遠心加速器の概略図

の葉の表面上の精製水は接触角が180度とみなすことができる[5]。液滴に作用する重力の大きさを人為的に変えるために、遠心加速器を利用した。その概略を図２に示す[6]。遠心加速器は回転するビームの一端に試験装置搭載用のゴンドラを取り付け、遠心力を利用してゴンドラ内に疑似的な過重力場を形成するものである。本装置で作り出せる過重力場の大きさの範囲はG＝１から15である。ゴンドラはビームの回転に伴い半径方向に振り出され、その底面が常に過重力の方向に一致するようになっている。液滴の変形の様子はゴンドラ内に取り付けたビデオカメラによって撮影することができる。ビデオ信号は回転軸に取り付けてあるスリップリングを介して取り出し、録画した。この録画画面から液滴の最大径２R_mを測定した。また、G＝１の場合には読みとり顕微鏡を用いて液滴最大径を求めた。

４．計算結果および考察

４．１　表面張力の温度依存性を考慮しない場合（ε＝0）

はじめに、表面張力の温度依存性を考慮しない場合（$d\sigma/dT=0$）の計算を行った。計算に使用した物性値および接触角を表１に示す[5]。図３および図４はG＝１の条件のおける里芋の葉の上に置かれた精製水（θ＝180度）およびテフロン上の水銀（θ＝150度）に対する計算結果の例で、液滴の体積Vを変化させた場合の液滴形状の変化を示している。計算では図１に示すように液滴頂部を原点にとってあるので、図の上方が重力の方向である。Vが小さくさると液滴形状は球形に近くなり、Vが大きくなる

表１　計算に用いた試料の物性値と接触角

	Density ρ (kg/m)^3	Surface tension σ (N/m)	Contact angle θ (deg.)
Water	996.62	0.07169	108
Water	996.62	0.07169	180
Benzene	859.8	0.02888	46
Mercury	13528	0.470	150

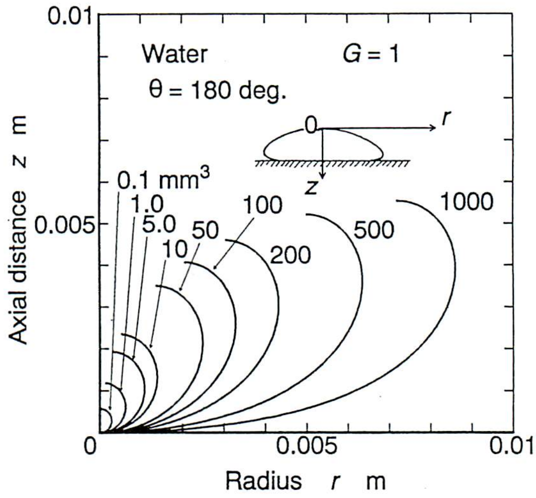


図３　体積Vによる液滴形状の変化(精製水)

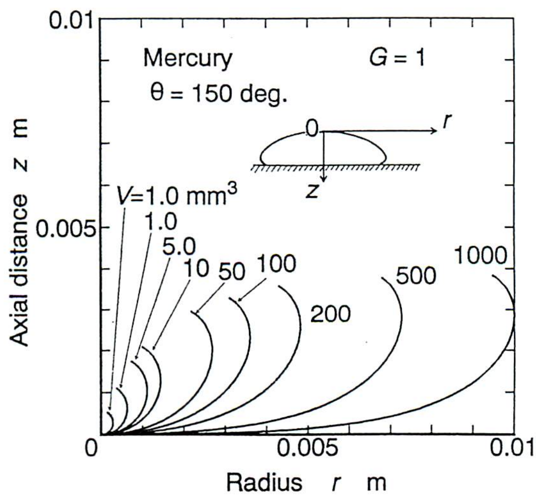


図４　体積Vによる液滴形状の変化(水銀)

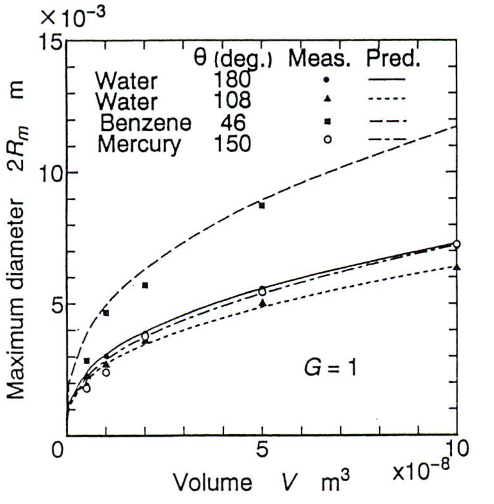


図5　液滴最大径2Rmの体積Vによる変化（計算値と測定値の比較）

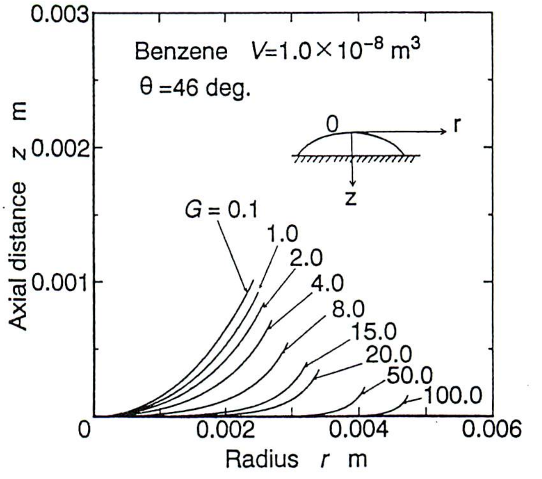


図7　重力場の大きさGによる液滴形状の変化（ベンゼン）

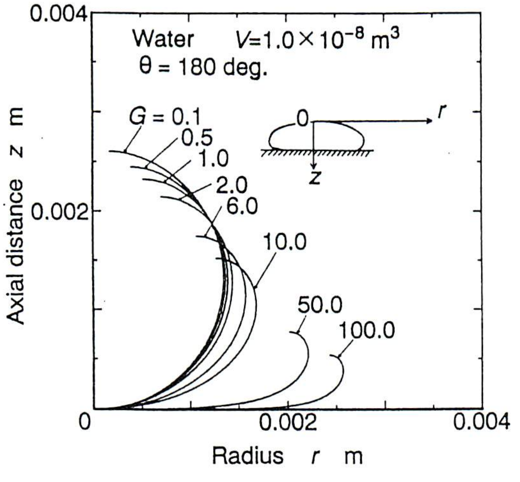


図6　重力場の大きさGによる液滴形状の変化（精製水）

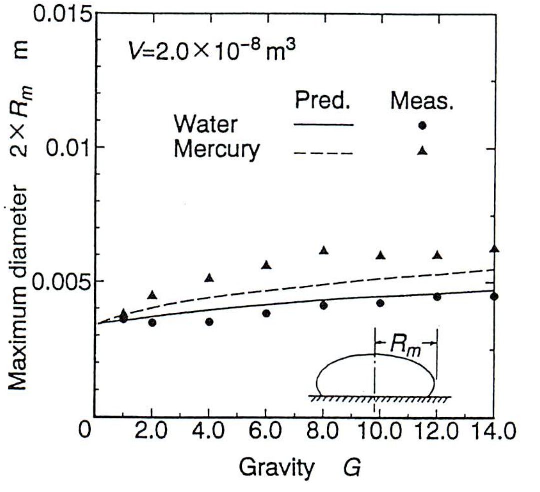


図8　重力場の大きさGによる液滴最大径2Rmの変化（計算値と実験値の比較）

と液滴の高さHが一定値に漸近する。図5は液滴の最大直径2Rm（図1参照）のVによる変化を計算値と測定値で比較したものである。全ての液体について実験値と測定値はよく一致しており、本解析手法の妥当性が裏付けられる。

図6は体積Vを一定として精製水の液滴形状に及ぼす重力の大きさGの影響を示したものである。Gが小さくなると重力による液滴の偏平化の効果が表面張力による球形化の効果に比べて小さくなるために液滴形状は球形に近くなる。図7はベンゼンに関する計算結果であり、精製水の場合と同様のことがいえる。ただし、図の縦軸は横軸の倍のスケールにしてある。図8はGによる液滴の最大径2Rmの変化を示したもの

で、遠心加速器を用いて測定した実験点を対比させた。液滴径はビデオ画面上で読み撮っているために精度があまり高くないが、精製水に関しては実験値と計算値が定量的によく一致している。また、精製水に比べ水銀の方が重力の効果を強く受けてより大きく変形することが計算と実験の両結果から示され、Gが変化した場合の液滴の変形挙動が本計算手法によって解析できることを実験的に確認することができた。図９および図10は精製水の接触角 $\theta=180$度および $\theta=108$度の液滴形状に与えるGの影響をまとめたものである。図９の場合は θ が180度であるから、Gが小さくなるとhが $2R_m$ に一致するようになる。また、Gが大きくなると液滴が偏平になるために $R_m \simeq R_b$ となる。これらの図中にはG＝１の底面積に対するその増加割合

$$\Phi = \frac{\pi R_b^2}{\pi R_{b1}^2} \tag{26}$$

のGに対する変化も示した。ここで、R_{b1} はG＝１における液滴底面の半径である。このように $\theta=180$度と108度を比較すると、$\theta=180$度の方がGの増加によって液滴底面積が著しく増加することがわかる。このことから、接触角が大きいほどGの増加に伴う底面積の拡大割合が大きくなるものと考えられる。

４．２　表面張力の温度依存性を考慮した場合

高温壁面からの熱回収問題を念頭において、次のような計算例を考える。すなわち、精製水液滴の頂部温度が壁面温度より低い場合を想定する。表２は計算に用いた条件

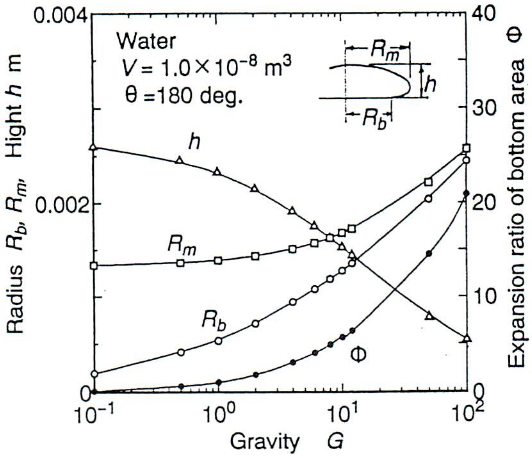


図９　液滴形状の各種パラメータに与えるGの影響（精製水、$\theta=180$度）

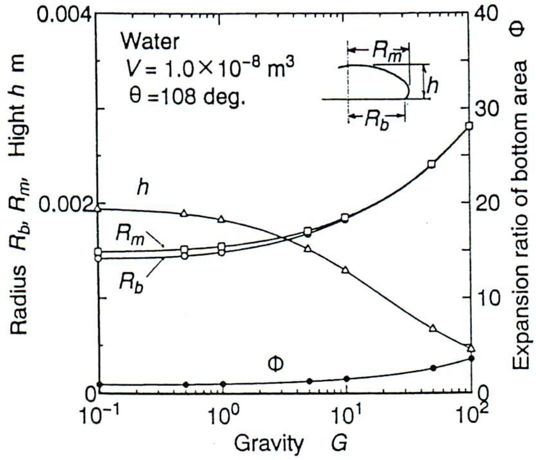


図10　液滴形状の各種パラメータに与えるGの影響（精製水、$\theta=108$度）

を表している。ただし、密度 ρ は平均温度で評価する。Case1は接触角 $\theta=150$度で高温壁面に接触している液滴について、液滴頂部の温度を一定にして壁面温度を変えた場合である。また、Case2は液滴底部に蒸気膜が形成されるライデンフロスト現象を想定し、$\theta=180$度で液滴底面の温度 T_b を沸点（100℃）に固定して液滴頂部の温度を変

表２　表面張力の温度依存性の計算に用いた物性値

Case1 Water $V=1.0\times10^{-8}\mathrm{m}^3$ $\theta=150$deg.					
T_0(℃)	T_b(℃)	σ_0(N/m)	σ_b(N/m)	ρ(kg/m^3)	ε
20	20	0.0728	0.0728	998.20	0
20	60	0.0728	0.0663	992.22	-0.089
20	100	0.0728	0.0594	983.16	-0.184
Case2 Water $V=1.0\times10^{-8}\mathrm{m}^3$ $\theta=180$deg.					
T_o(℃)	T_b(℃)	σ_0(N/m)	σ_b(N/m)	ρ(kg/m^3)	ε
20	100	0.0728	0.0594	983.16	-0.184
60	100	0.0661	0.0594	971.69	-0.101
100	100	0.0594	0.0594	958.18	0
Case3 Water $V=1.0\times10^{-8}\mathrm{m}^3$ $\theta=150$deg.					
T_0(℃)	T_b(℃)	σ_0(N/m)	σ_b(N/m)	ρ(kg/m^3)	ε
20	60	0.0728	0.0663	992.22	-0.089
20	20	0.0728	0.0728	998.20	0
60	60	0.0663	0.0663	983.16	0
40	40	0.0696	0.0696	992.22	0

えた場合である。図11および図12は、Case1およびCase2に対するG＝１およびG＝10の計算結果である。いずれの場合にも表面張力の温度依存性を考慮することによって液滴形状が若干変化することがわかる。

表２のCase3は表面張力の温度依存性を考慮した場合と、温度依存性を考慮せず表面張力の値を液滴頂部の温度で評価した場合、壁面温度で評価した場合および平均温度で評価した場合の比較計算の条件を表している。ただし、このとき液滴はθ＝150度で壁面に接している場合を想定している。図13はCase3に対する計算結果で液滴の最大半径Rm、底面半径Rbおよび高さhに与えるGの効果を表している。これより、Gが小さくなるほど液滴形状に与える表面張力の温度依存性の影響は大きくなることが

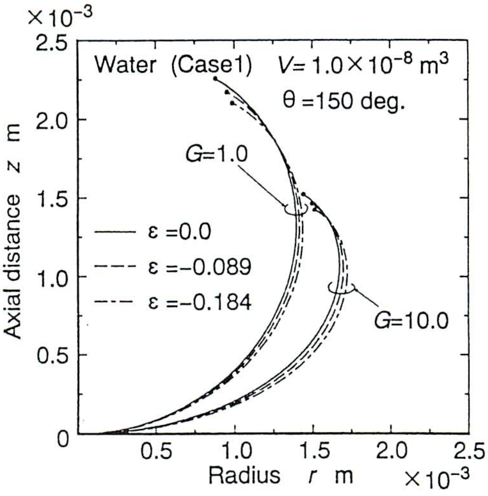


図11　液滴形状に与える表面張力の温度依存性の影響（精製水、θ＝150度）

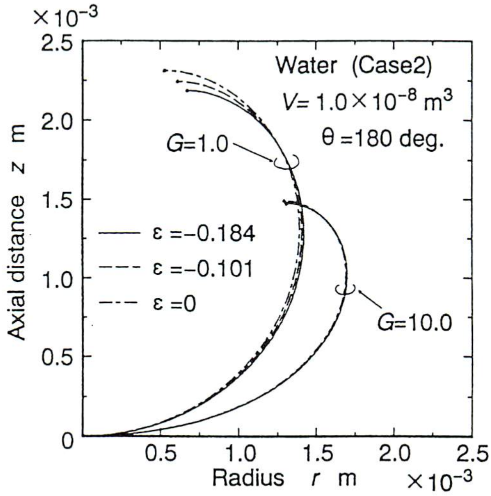


図12　液滴形状に与える表面張力の温度依存性の影響（精製水、θ＝180度）

わかる。またこのとき、表面張力の温度依存性を考慮した場合は表面張力の値を液滴頂部の温度、壁面温度および平均温度で評価するいずれの場合よりも底面半径が増加することが確認できる。これは表面張力を一定にした解析では、Gが小さい状態で液滴が球形に近づくためである。G＝0.01のとき温度依存性を考慮した場合の底面積は

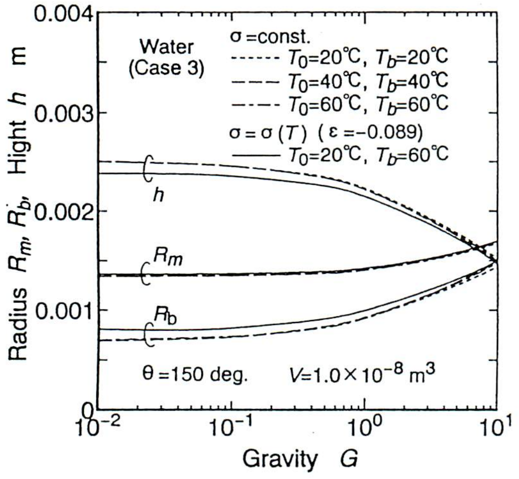


図13　表面張力の温度依存性を考慮した場合と定物性の場合の比較

温度一定とした場合のそれに比べて1.36倍ほど大きくなる。このことから微小重力環境における壁面上液滴への熱移動現象を考える場合、表面張力の温度依存性を考慮して液滴の底面積を正確に見積もることが重要であると思われる。

３．結論

地球上と異なった重力環境において、液滴による高温壁面からの熱回収問題の基礎資料を得る目的で、壁面上の液滴形状に与える重力場の影響を簡単な数値モデルにより解析した。その結果、以下のような知見を得た。

(1) 重力場の大きさGが大きくなると液滴底面積が増大するが、接触角θが大きいほどGに伴う底面積の増加率が大きくなる。

(2) 表面張力の温度依存性を考慮した場合の解析モデルを提示し、いくつかの具体的解析を行った。液滴の母線に沿って一定温度勾配がある場合、表面張力の温度依存性が液滴形状に与える影響はGが小さくなるに従って顕著になることがわかった。

(3) 液滴表面に単純な温度分布を仮定して表面張力の温度依存性を考慮した場合の液滴形状は、表面張力を液滴頂部温度、壁面温度または平均温度一定として評価したいずれの場合とも異なることが確認できた。

参考文献

(1) 新井、天谷：機論，Vol .60, No 572,1343-1348, (1994).

(2) L.H.J.Wachters , et.al. : Chemical Engineering Science , Vol .21,923-936, (1966).

(3) V.G.Babskii , et al. : Low - Gravity Fluid Mechanics , Springer - Verlag , (1976).

(4) 小林：曲線と曲面の微分幾何、裳華房、(1997).

(5) 小野：表面張力、共立出版、(1980).

(6) 新井、天谷、日本マイクログラビティ応用学会誌、Vol .10,259-266, (1993).